4. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Има их 15. То су: ABG, BGC, CGF, AGF, AFE, EFD, CFD, CDE, ADE, ACF, ABC, ABF, BCF, ACE и ACD. (за сваки наведени троугао по 1 бод плус 5 бодова ако су сви наведени)

2. (МЛ 2, год. 2004/5, стр. 27, зад. 2376) Могуће је да Воја, Раде и Зоран добију редом кликера: 1, 1, 5 или 1, 2, 4 или 1, 3, 3 или 1, 4, 2 или 1, 5, 1 или 2, 1, 4 или 2, 2, 3 или 2, 3, 2 или 2, 4, 1 или 3, 1, 3 или 3, 2, 2 или 3, 3, 1 или 4, 1, 2 или 4, 2, 1 или 5, 1, 1. То је укупно 15 начина. (за сваки наведен или објашњен начин по 1 бод плус 5 бодова ако их је тачан број)

3. Нека је ширина стазе x, а дужина тражене странице y (све у m). Пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе уствари пређе за $8x$ m дужи пут него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе. Следи да је $x = 2$. (10 бодова) Одатле добијамо да је површина стазе (у m^2) $4\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot16+2\cdot2\cdot y$. Према томе, $80 + 4 \cdot y = 176$, па је $y = 24$. (10 бодова)

4. Да је и број фазана и број јаребица порастао 3 пута, било би их укупно $3 \cdot 565$, односно 1695. Како је број јаребица порастао 5 пута, а не 3 пута, то разлика $2007-1695$ представља 2 пута увећан почетни број јаребица. (15 бодова) Према томе, на почетку је у шуми било 156 јаребица и 409 фазана. (5 бодова)

5. Како је Б различито од Л и разлика између Б и Л не може бити већа од 1, то је Б = 6. (2 бода) Због преношења 1 при сабирању са цифре јединица хиљада на цифру десетица хиљада, добијамо да је О = 9 (2 бода) и А = 0 (2 бода). Како нема преношења при сабирању са цифре десетица на цифру стотина, то је 2В = 10 + Ј, па је В = 7 или В = 8. Не може бити В = 8 јер би било Ј = 6, а та цифра је већ искоришћена. Према томе, В = 7 (4 бода), Ј = 4 (2 бода). Како је К + Ц = 10 и У +1 = К, то користећи преостале цифре добијамо да је К = 2 (4 бода), Ц = 8 (2 бода) и У = 1 (2 бода). Након замене дата једнакост гласи: $712 + 59708 = 60420$.

5. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

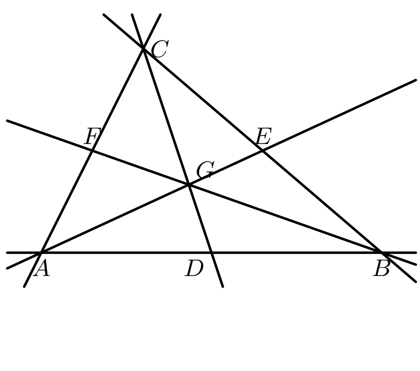
1. Како је $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, а $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, то је $\frac{5}{10} < \frac{a}{10} < \frac{15}{20}$, па је $a = 6$ или $a = 7$. (10 бодова) Заменом ових вредности у једнакост $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ добијамо да је једино решење задатка: $a = 7$, $b = 2$. (10 бодова)

2. Како је 10 m = 100 dm, то је укупно исечено 1 000 000 коцкица. (5 бодова) Да би се поплочала стаза ширине 1 m потребно је поређати једну поред друге 10 коцкица. То значи да је по дужини поређано једна поред друге 100 000 коцкица. (8 бодова) Та стаза је дугачка 100 000 dm, односно 10 km. (5 бодова) Пешак би ту стазу прешао за 2 сата. (2 бода)

3. (МЛ 3, год. 2005/6, стр. 30, зад. 1996) Бројеви $2p$, $4r$ и 2006 су парни, па је паран и број $3q$. Онда је и q паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q = 2$. (6 бодова) Следи да је $2p + 4r = 2000$, односно $p + 2r = 1000$. Како су $2r$ и 1000 парни бројеви, то је и p паран број, па је $p = 2$. (6 бодова) Следи да је $r = 499$. (2 бода) Након провере да је 499 прост број (6 бодова) закључујемо да је јединствено решење задатка: $p = 2$, $q = 2$, $r = 499$.

4. Остаци при дељењу бројева 287 и 431 са природним бројем n су редом 1 и 2, па следи да n дели бројеве 286 и 429. (2 бода) Како је $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$, а $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$, то је могуће да је $n = 11$ или $n = 13$ или $n = 143$. (свака пронађена могућност по 3 бода) Провером утврђујемо да се при дељењу броја 231 са бројем $n + 1$ добија остатак 3 једино за $n = 11$. (провера сваке од могућности по 3 бода)

5. Једно решење је дато на слици. (20 бодова)

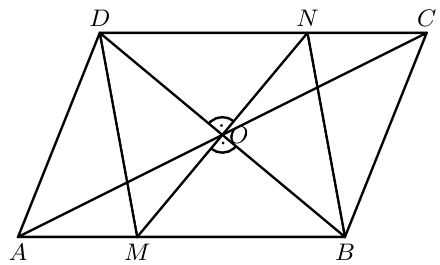


6. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

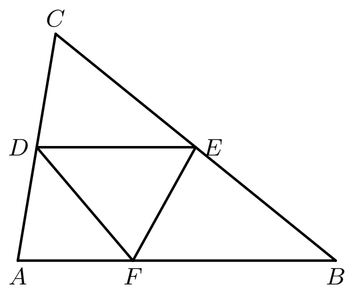
1. Из друге једнакости добијамо да је $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$. (10 бодова) Користећи прву једнакост добијамо да је $a = 3$, $b = 27$. (10 бодова)

2. Углови OBM и ODN су углови са паралелним крацима, па су једнаки. Тачка O је средиште дијагонале BD, па је $OB = OD$. Како је још $\measuredangle BOM = \measuredangle DON = 90°$, то је по другом ставу подударности троуглова (УСУ) $\triangle MBO \cong \triangle NDO$. Следи да је $MB = ND$. (5 бодова) Ове дужи су и паралелне, па следи да је четвороугао $MBND$ паралелограм. (5 бодова) Његове дијагонале су међусобно нормалне, па је он ромб. (10 бодова)



3. Прости бројеви већи од 3 су непарни, па су a и b непарни бројеви. Њихов збир $a + b$ и њихова разлика $a - b$ су парни бројеви, па је производ $(a + b) \cdot (a - b)$ дељив са 4. (10 бодова) При дељењу са 3 бројеви a и b могу имати остатак 1 или 2. Ако имају исти остатак, онда је разлика $a - b$ дељива са 3, а ако имају различит остатак, онда је збир $a + b$ дељив са 3. У сваком случају производ $(a + b) \cdot (a - b)$ је дељив са 3. (10 бодова) Како је дељив и са 3 и са 4, дељив је са 12.

4. Нека је F тачка пресека симетрала углова ADE и BED. Како је DE средња линија троугла ABC, то је она паралелна са страницом AB. Одатле следи да је $\measuredangle FDE = \measuredangle AFD$, па је $\measuredangle AFD = \measuredangle ADF$. (6 бодова) Троугао AFD је једнакокрак, па је $AF = AD$. (4 бода) Тачка D је средиште странице AC, па је $AF = \frac{AC}{2}$. (4 бода) Аналогно добијамо да је $BF = \frac{BC}{2}$. Следи да је $AB = \frac{AC+BC}{2}$. (6 бодова)



5. (МЛ 2, год. 2005/6, стр. 29, зад. 1988) Нека је a дужина основице, а b дужина крака (све у cm) троугла који испуњава услове задатка. Како је $a + 2b$ непаран број, то је a непаран број. Збир дужина две странице у троуглу је већи од дужине треће странице, па мора

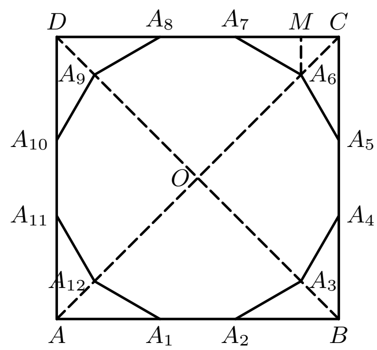
бити $a < 2b$. Како је $a + 2b = 2005$, то је $a < 1003$, па a може бити било који елемент скупа $\{1, 3, \ldots, 1001\}$. (15 бодова) Према томе, број троуглова који испуњавају услове задатка је 501. (5 бодова)

7. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. (МЛ 1, год. 2004/5, стр. 33, зад. 2371) Из $\sqrt{17} > 4$ и $\sqrt{37} > 6$ следи $\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}} > \sqrt{10}$. (10 бодова) Како је $\sqrt{10} > 3$ и $\sqrt{2} > 1$, то је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > \sqrt{5+3+1}$, па следи тражена неједнакост. (10 бодова)

2. Обележимо темена дванаестоугла словима $A_1, A_2, \dots A_{12}$, а темена квадрата словима A, B, C и D (као на слици). Нека је дужина странице дванаестоугла једнака x (у cm). Обележимо са M подножје нормале из A_6 на страницу квадрата CD. У правоуглом троуглу A_6MA_7 угао A_6A_7M једнак је 30° као спољашњи угао правилног дванаестоугла. Због тога је $A_6M = \frac{x}{2}$, а $A_7M = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. (8 бодова) Троугао A_6CM је једнакокрако правоугли, па је $MC = \frac{x}{2}$. (5 бодова) Како је $A_8D = A_7C$, то је $CD = x + 2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x}{2})$. (4 бода) Следи да је $x \cdot (2+\sqrt{3}) = 10$, па је $x = 10 \cdot (2-\sqrt{3})$. (3 бода)



3. Пођимо од очигледне неједнакости $3^2 > 2^3$. Степеновањем добијамо да је $3^{2000} > 2^{3000}$. (4 бода) Следи да је $3^{2007} > 3^7 \cdot 2^{3000}$ (6 бодова), па је $3^{2007} - 2^{3000} > (3^7-1) \cdot 2^{3000}$ (4 бода). Како је $3^7 - 1 > 2007$, то је $(3^7-1)\cdot 2^{3000} > 2007 \cdot 2^{2007}$. (4 бода) Према томе, $3^{2007} - 2^{3000} > 2007 \cdot 2^{2007}$. (2 бода)

4. Претпоставимо да постоји такав троугао. Ако са P означимо његову површину (у cm^2), онда користећи формулу за површину троугла добијамо да су дужине страница (у cm) тог троугла $\frac{2P}{1}$, $\frac{2P}{2}$ и $\frac{2P}{3}$. (5 бодова) Како је $\frac{2P}{1} > \frac{2P}{2} + \frac{2P}{3}$, то је дужина једне странице тог троугла већа од збира дужина друге две странице. То је немогуће, па следи да такав троугао не постоји. (15 бодова)

5. Такви четвороцифрени бројеви могу да буду записани са две цифре које се појављују по два пута или са три цифре од којих се једна појављује два пута, а остале две по једном. У првом случају, на три начина бирамо које две цифре се појављују по два пута у запису броја. (3 бода) Нека су то на пример неке цифре a и b. Бројеви

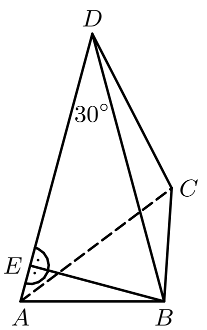
записани помоћу њих су: $aabb$, $abab$, $abba$, $baba$, $baab$ и $bbaa$. (5 бодова) Према томе, у том случају има $3 \cdot 6$, односно 18 бројева. (2 бода) У другом случају, на три начина бирамо цифру која се у запису броја појављује два пута (3 бода), на четири начина бирамо место на коме је једна од цифара које се у том запису појављују једном, а на три начина бирамо место на коме је друга од цифара које се у том запису појављују једном (5 бодова). У том случају има $3 \cdot 4 \cdot 3$, односно 36 бројева. (2 бода) Укупно има 54 броја са датом особином.

8. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Како је $2007^{2005} - 2007 = 2007 \cdot (2007^{2004} - 1) = 9 \cdot 223 \cdot (2007^{2004} - 1)$, то је дати број дељив са 9. (8 бодова) Број 2007^4 се завршава цифром 1, па следи да се и број 2007^{2004} завршава цифром 1. Због тога је $2007^{2004} - 1$ дељив са 10, па је и $2007^{2005} - 2007$ дељив са 10. (12 бодова) Како је дати број дељив и са 9 и са 10, он је дељив са 90.

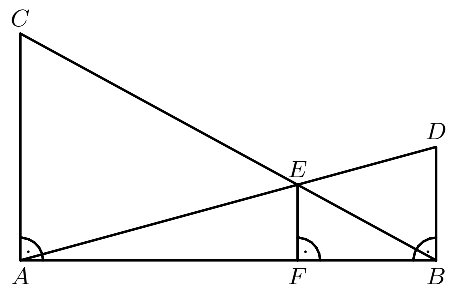
2. Обележимо темена основе пирамиде са A, B и C, а врх са D. Нека је тачка E подножје висине из темена B бочне стране ABD. У правоуглом троуглу EBD угао EDB једнак је $30°$, па је дужина катете BE једнака половини дужине хипотенузе BD и износи $4\ cm$. (4 бода) Површина бочне стране пирамиде је $16\ cm^2$. (4 бода) Примењујући Питагорину теорему на троугао EBD добијамо да је дужина дужи ED једнака $4\sqrt{3}\ cm$. Онда је дужина дужи AE једнака $8 - 4\sqrt{3}\ cm$. Примењујући Питагорину теорему на троугао ABE добијамо да је дужина основне ивице AB дате пирамиде једнака $8\sqrt{2-\sqrt{3}}\ cm$. (4 бода) Основа пирамиде је једнакостранични троугао, па је површина те основе једнака $\frac{(8\sqrt{2-\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2$, тј. $32\sqrt{3} - 48\ cm^2$. (4 бода) Површина пирамиде је $32\sqrt{3} - 48\ cm^2 + 3 \cdot 16\ cm^2$, односно $32\sqrt{3}\ cm^2$. (4 бода)



3. (МЛ 6, год. 2005/6, стр. 32, зад. 30) Како је $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + 2004 \cdot 2006 = (2-1) \cdot (2+1) + (3-1) \cdot (3+1) + (4-1) \cdot (4+1) + \cdots + (2005-1) \cdot (2005+1) = 2^2 - 1 + 3^2 - 1 + 4^2 - 1 + \cdots + 2005^2 - 1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2005^2 - 2005$ (15 бодова), то је тражена разлика једнака 2005 (5 бодова).

4. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на дуж AB. Троуглови AFE и ABD су правоугли и имају заједнички угао FAE, па су слични. Следи да је $FE : BD = AF : AB$. (5 бодова) Троуглови FBE и ABC су правоугли и имају заједнички угао FBE, па су и

они слични. Следи да је $FE : AC = FB : AB$. (5 бодова) Из ових једнакости добијамо да је $\frac{FE}{BD} + \frac{FE}{AC} = \frac{AF+FB}{AB}$, односно $FE \cdot (\frac{1}{BD} + \frac{1}{AC}) = 1$. Према томе, дужина дужи FE, а самим тим и тражено растојање је 2 cm. (10 бодова)



5. Цифру десетица хиљада петоцифреног броја са датим својством можемо изабрати на 5 начина, цифру јединица хиљада на 4 начина, цифру стотина на 3 начина, цифру десетица на 2 начина и цифру јединица на 1 начин, одакле следи да таквих петоцифрених бројева има 120. (3 бода) Како су код сваког од њих све цифре различите, то се у запису свих 120 бројева свака од цифара 1, 2, 3, 4 и 5 појављује по 120 пута, и то по 24 пута на сваком месту у запису петоцифреног броја. (5 бодова) Следи да је збир свих петоцифрених бројева са датим својством једнак $(1+2+3+4+5)\cdot 24\cdot(10000+1000+100+10+1)$, тј. 3999960. (12 бодова)