Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

10.03.2007.

8. РАЗРЕД

1. У једначини $3 \cdot (x - 4k) - 2k = 3 \cdot (2x - 3) + 1$ број k је реалан параметар. Одредити све вредности тог параметра за које је решење једначине веће од -2.

2. У једнакостраничан троугао ABC уписана су три круга, тако да сваки од њих додирује по две странице и уписани круг k тог троугла. Одредити однос површине круга k и збира површина та три уписана круга.

3. Одредити скуп свих вредности позитивног реалног броја a за које неједначина $|x - 2| < a$ има тачно четири решења у скупу целих бројева.

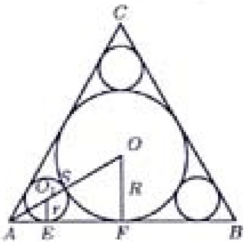
4. Коцка чија ивица је дужине 10 cm пресечена је једном равни на два квадра. Одредити однос запремина тих квадара ако је однос њихових површина $2 : 3$.

5. На свакој страници квадрата дате су по 3 тачке тако да ниједна од њих није теме квадрата. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

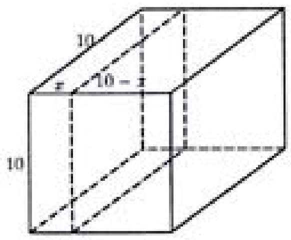
1. (МЛ 2, год. 2005/6, стр. 17, зад. 9) Решење дате једначине је $x = \frac{8-14k}{3}$. (8 бодова) То решење је веће од -2 ако је $\frac{8-14k}{3} > -2$, тј. ако је $k < 1$. Према томе, $k \in (-\infty, 1)$. (12 бодова)

2. Нека су тачка O и R центар и дужина полупречника круга k, а тачка O_1 и r центар и дужина полупречника једног од три подударна уписана круга. Нека је, даље, S додирна тачка та два круга, а F и E тачке у којима их страница AB додирује. Како су троуглови AFO и AEO_1 правоугли, а $\measuredangle FAO = 30^\circ$, то је $AO = 2R$ и $AO_1 = 2r$. Следи да је $AS = AO - OS = R$, а такође и $AS = AO_1 + O_1S = 3r$. Према томе, $R = 3r$. (15 бодова) Површина круга k је $R^2\pi$, односно $9r^2\pi$, а збир површина три уписана круга је $3r^2\pi$. Тражени однос је $3 : 1$. (5 бодова)



3. (МЛ 3, год. 2006/7, стр. 31, зад. 2493) Дата неједначина еквивалентна је са $2-a < x < 2+a$. (5 бодова) Ако је $a \leq 1$, број 2 је једино решење неједначине. Ако је $1 < a \leq 2$, решења неједначине су 1, 2 и 3. Ако је $a > 2$, неједначина има пет или више решења. Следи да не постоји позитиван реалан број a за који дата неједначина има тачно 4 решења у скупу целих бројева. Према томе, тражени скуп вредности је празан. (15 бодова)

4. Нека дата раван дели ивице коцке које сече на делове дужине x и $10 - x$ (у cm). Тада су површине квадара (у cm^2) на које је подељена коцка $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10x$ и $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \cdot (10 - x)$, односно $200 + 40x$ и $600 - 40x$. (6 бодова) Однос тих површина је $2 : 3$, па из једначине $3 \cdot (200 + 40x) = 2 \cdot (600 - 40x)$ добијамо да је $x = 3$. (8 бодова) Запремине датих квадара су $3 \cdot 10 \cdot 10\ cm^3$ и $7 \cdot 10 \cdot 10\ cm^3$. Следи да је однос тих запремина $3 : 7$. (6 бодова)



5. Могуће је да два темена троугла припадају истој страници квадрата или да свако теме троугла припада различитој страници квадрата. У првом случају, на 4 начина бирамо страницу квадрата којој припадају два темена троугла, на 3 начина бирамо две од три тачке са изабране странице и на 9 начина бирамо треће теме троугла од тачака које припадају осталим страницама квадрата. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4 \cdot 3 \cdot 9$ троуглова, тј. 108 троуглова. (10 бодова) У другом случају, на 4 начина бирамо три од четири странице квадрата којима припада по једно теме троугла, а на $3 \cdot 3 \cdot 3$ начина са сваке од изабраних страница квадрата по једну од три дате тачке. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ троуглова, тј. 108 троуглова. (10 бодова) Према томе, укупно је датим тачкама одређено 216 троуглова.