

1. Јован је кренуо другу у госте, са намером да тамо стигне за унапред одређено време. Путовао је један сат брзином  $v_1 = 4\text{km/h}$  и за то време је израчунао, ако све време иде том брзином, закацниће  $\Delta t_1 = 20\text{min}$ . Зато је по истеку првог сата путовања повећао брзину на  $v_2 = 6\text{km/h}$  и код друга стигао  $\Delta t_2 = 10\text{min}$  раније. Израчунати колики пут је прешао од куће до друга и за колико времена је планирао да стигне?
2. Три друга, Милан, Ненад и Петар, крећу истовремено из Великог у Мало место. Милан иде аутомобилом и први стиже у Мало место и одмах се враћа назад. У повратку, на растојању  $\ell_1 = 25\text{km}$  од Малог места, срео је Ненада на мотоциклу и на растојању  $\ell_2 = 32\text{km}$  Петра на бициклу. Следећи у Мало место стиже Ненад, одмах се враћа и на  $\ell_3 = 8\text{km}$  од Малог места среће Петра. Колико је растојање између Великог и Малог места?
3. Куглица се креће између два масивна вертикална зида, сударајући се са њима. Један зид је непокретан а други се од њега удаљава константном брзином  $u = 0,5\text{m/s}$ . Куглица се све време креће хоризонтално константном брзином, а њени судари са зидовима су апсолутно еластични (брзина са којом удари у зид једнака је по интензитету брзини с којом се одбија од зида). Ако куглица полази од непокретног зида брзином  $v_0 = 10,3\text{m/s}$  одредити колико пута ће да удари у покретни зид.
4. Пут од А до Б се састоји од  $s_1 = 4\text{km}$  низбрдица, од  $s_2 = 8\text{km}$  узбрдица и од  $s_3 = 12\text{km}$  равног дела. Мотоциклиста је од А до Б путовао  $t_{AB} = 67,5\text{min}$  а од Б до А  $t_{BA} = 60\text{min}$ . Ако знамо да је брзина на равном делу пута  $v_3 = 24\text{km/h}$  одредити брзине на узбрдицама и низбрдицама.
5. Због деловања силе  $F_1 = 20\text{N}$  еластична опруга се истегне за  $\Delta \ell_1 = 0,1\text{m}$ . Уколико на ту опругу делује сила  $F_2 = 30\text{N}$ , дужина истегнуте оприге износи  $\ell_2 = 0,65\text{m}$ . Одредити дужину неоптерећене опруге и издужење под дејством  $F_2$ .

Сваки задатак носи 20 поена

Задатке припремио: др Мирослав Николић  
Рецензент: др Надежда Новаковић  
Председник комисије: др Надежда Новаковић

Свим такмичарима желимо успешан рад!

1. За време  $t_1 = 1\text{h}$  Јован је прешао  $l_1 = 4\text{km}$  крећући се брзином  $v_1 = 4\text{km/h}$ . Ако настави истом брзином за остатак пута важи  $l_2 = v_1(t + \Delta t_1)$  где је  $t$  допуна до планираног времена. Након што је променио брзину за остатак пута важи  $l_2 = v_2(t - \Delta t_2)$ . Ако из прве релације за  $l_2$  израчунамо  $t = \frac{l_2 - v_1 \Delta t_1}{v_1}$  па то заменимо у другу добијемо
- $$l_2 = \frac{v_1 v_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{v_2 - v_1}$$
- Замена бројних вредности даје  $l_2 = 6\text{km}$ , па је укупно растојање  $l = l_1 + l_2 = 10\text{km}$ . На основу познатог растојања можемо да одредимо планирано време. Остатак планираног времена након промене брзине је,  $t = \frac{l_2 - v_1 \Delta t_1}{v_1}$  односно  $t = 70\text{min}$ , па је укупно планирано време  $t_p = t_1 + t = 130\text{min}$ .
2. Нека су  $v_1, v_2$  и  $v_3$  брзине аутомобила, мотоцикла и бицикла а места сусрета су од Малог места удаљена  $l_1 = 25\text{km}$  аутомобил и мотоцикл,  $l_2 = 32\text{km}$  аутомобил и бицикл и  $l_3 = 8\text{km}$  мотоцикл и бицикл. На основу времена од поласка из Великог места до сусрета можемо да напишемо релације: за први сусрет  $\frac{l + l_1}{v_1} = \frac{l - l_1}{v_2}$ , за други сусрет  $\frac{l + l_2}{v_1} = \frac{l - l_2}{v_3}$  и за трећи сусрет  $\frac{l + l_3}{v_2} = \frac{l - l_3}{v_3}$ . Из прве је  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{l - l_1}{l + l_1}$ , из друге  $\frac{v_3}{v_1} = \frac{l - l_2}{l + l_2}$  и из треће је  $\frac{v_3}{v_2} = \frac{l - l_3}{l + l_3}$ . Ако из последње нађемо  $v_3 = v_2 \frac{l - l_3}{l + l_3}$  па заменимо у претпоследњу и средимо добијемо  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{(l - l_2)(l + l_3)}{(l + l_2)(l - l_3)}$ . На основу последње и  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{l - l_1}{l + l_1}$  је  $\frac{l - l_1}{l + l_1} = \frac{(l - l_2)(l + l_3)}{(l + l_2)(l - l_3)}$  и тиме смо елиминисали брзине. Из последње релације налазимо  $l^2 = \frac{l_1 l_2 l_3}{l_1 - l_2 + l_3}$ . Замена бројних вредности даје  $l^2 = 6400\text{km}^2$  па је  $l = 80\text{km}$ .
3. Посматрамо у систему везаном за непокретни зид. Куглица полази брзином  $v_0$  а у покретни зид удара брзином  $v' = v_0 - u$ , одбија се истом брзином али због кретања зида према непокретном она одлази са брзином  $v = v' - u$  односно  $v = v_0 - 2u$ . Ово се понавља при сваком удару па је стога  $v = v_0 - 2nu$ . Лако је израчунати да при сваком судару са покретним зидом куглица губи од брзине  $1\text{m/s}$  тако да ће после десетог судара њена брзина бити  $v = 0,3\text{m/s}$  и више не може да стигне покретни зид.
4. За наведено кретање можемо да пишемо релацију  $t_{AB} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3}$  за кретање од А

према Б и  $t_{BA} = \frac{s_1}{v_2} + \frac{s_2}{v_1} + \frac{s_3}{v_3}$ , за кретање од Б према А. Због лакшег рачуна написаћемо их у облику  $\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = X$  и  $\frac{s_1}{v_2} + \frac{s_2}{v_1} = Y$  где су  $X = t_{AB} - \frac{s_3}{v_3}$  и  $Y = t_{BA} - \frac{s_3}{v_3}$ . Величине  $X$  и  $Y$  имају димензију времена и могу одмах да се бројно израчунају. Оде је дато овако да би написали решење у општим бројевима. Из  $\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = X$  налазимо  $\frac{1}{v_1} = \frac{Xv_2 - s_2}{v_2s_1}$  што заменом у  $\frac{s_1}{v_2} + \frac{s_2}{v_1} = Y$  и сређивањем даје  $v_2 = \frac{s_2^2 - s_1^2}{Xs_2 - Ys_1}$ , односно  $v_2 = \frac{v_3(s_2^2 - s_1^2)}{v_3(t_{AB}s_2 - t_{BA}s_1) + s_3(s_1 - s_2)}$ . Замена бројних вредности даје  $v_2 = 16\text{km/h}$ . Из релације  $\frac{1}{v_1} = \frac{Xv_2 - s_2}{v_2s_1}$  налазимо  $v_1 = \frac{v_2v_3s_1}{v_3(t_{AB}v_2 - s_2) - s_3v_2}$  што даје  $v_1 = 32\text{km/h}$ .

5. Еластичност опруге је  $k = \frac{F_1}{\Delta l_1}$ . Замена бројних података даје  $k = 200\text{N/m}$ . Такође можемо да пишемо  $k = \frac{F_2}{l_2 - l_0}$ , а одавде  $l_0 = \frac{k l_2 - F_2}{k}$ , односно  $l_0 = 0,5\text{m}$ . Тражено издужење је  $\Delta l_2 = l_2 - l_0$ , а то је  $\Delta l_2 = 0,15\text{m}$ .

Комисији желимо срећан рад и пријатан дан!